LAHENDUSED 10. KLASS

1. Vastus: **Jah, on.**

Lahendus:

Paneme tähele, et $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_{2023}^2 = 1$, mistõttu
$a_1^3 \cdot a_2^3 \cdot \ldots \cdot a_{2023}^3 = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2023}$.
Kui Juku korrutab omavahel kõik talle öeldud korrutiste tulemused, saab Juku lõpptulemuseks

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4) \cdot \ldots \cdot (a_{2021} \cdot a_{2022} \cdot a_{2023}) \cdot (a_{2022} \cdot a_{2023} \cdot a_1) \cdot (a_{2023} \cdot a_1 \cdot a_2) =$$

$$= a_1^3 \cdot a_2^3 \cdot \ldots \cdot a_{2023}^3 = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2023},$$

mis ongi küsitud vastuseks.

Hindamine:

Tähelepanek, et $a_k^2 = 1$ iga $k \epsilon \{1,2,\ldots,2023\}$ korral. 2p

Tähelepanek, et $a_k^3 = a_k^2 \cdot a_k = 1 \cdot a_k = a_k$ iga $k \epsilon \{1,2,\ldots,2023\}$ korral. 2p

On näidatud, et kõikide kolmekaupa korrutiste korrutis on võrdne korrutisega
$a_1^3 \cdot a_2^3 \cdot \ldots \cdot a_{2023}^3$. 2p

On tehtud õige lõppjäreldus. 1p

7p

Märkus: Antud ainult õige vastus - 0p.

2. Vastus: **1 pikk miil oli 24090 jalga.**

Lahendus:

Leiame Melchiori kiirused teekonna erinevatel etappidel. Et ta läbis üksi kõndides 3300 jalga 10 minutiga, siis oli tema kiiruseks üksi liikudes 19800 jalga tunnis. Et koos palveränduriga käies langes Melchiori kiirus 10 protsenti, siis oli tema kiirus palveränduriga koos liikudes $0{,}9 \cdot 19800 = 17820$ jalga tunnis. Et vanker liikus 3 korda kiiremini kui Melchior üksi jala käies, siis oli vankri kiiruseks 59400 jalga tunnis.

Leiame nüüd erinevate kiirustega läbitud vahemaad. Melchior üksi läbis 3300 jalga. Koos palveränduriga läbisid nad 20 minutiga ühe kolmandiku 17820 jalast ehk 5940 jalga. Vankriga läbiti veerand tunniga üks neljandik 59400 jalast, ehk 14850 jalga. Kokku läbis Melchior ühe pika miili käigus seega $3300 + 5940 + 14850 = 24090$ jalga.

Ehk 1 pikk miil oli 24090 jalga.

Hindamine:

On leitud Melchiori liikumise kiirused kolmel erineval liikumise etapil.	3p
On leitud läbitud teepikkused kolmel erineval liikumise etapil.	2p
On leitud, mitu jalga on ühes pikas miilis.	2p
	7p

3. Vastus: $\boldsymbol{A = ab + ac + bc,\ \ B = 2abc.}$

Lahendus:

Leiame nullist erinevate arvude a, b ja c pöördväärtused:

$\frac{1}{a} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$, $\quad \frac{1}{b} = \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y}$ ja $\quad \frac{1}{c} = \frac{z+x}{zx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$.

Seetõttu

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc}.$$

Järelikult

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{bc+ac+ab}{2abc}.$$

Ning $A = ab + ac + bc$ ja $B = 2abc$.

Hindamine:

Leitud arvude a, b ja c pöördväärtused.	3p
Avaldatud arvude x, y ja z pöördväärtuste summa.	3p
Leitud avaldised $A = ab + ac + bc$ ja $B = 2abc$ (või nendega samaväärsed avaldised).	1p
	7p

4. Vastus: 1) $\frac{3a^2}{4}$ ruutmeetrit.

<u>Lahendus:</u>

1) Kolmnurk ABC on täisnurkne ja võrdhaarne kolmnurk.

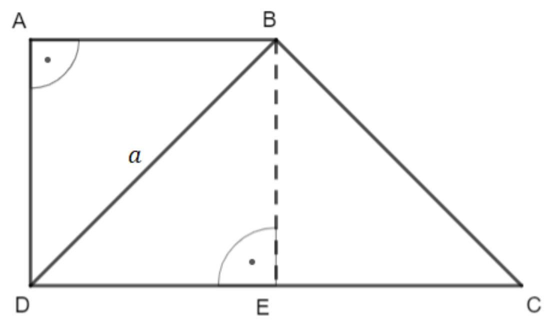
Seega $\angle ADB = \angle ABD = 45°$ ja $AD = AB$.

Olgu $AB = b$.

Siis Pythagorase teoreemi põhjal saame, et $a^2 = 2b^2$, millest $b^2 = 0{,}5a^2$.

Kuna $\angle ADC = 90°$ ja $\angle ADB = 45°$, on $\angle BDC = 45°$.

Kolmnurgad DAB ja DBC on sarnased, kuid ei ole võrdsed. Siis on ainus võimalus, et $\angle DBC = 90°$ ja $\angle BCD = 45°$ ning



$BD = BC = a$. Seega

$$S_{ABD} = \frac{b^2}{2} = \frac{0{,}5a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \quad \text{ja} \quad S_{DBC} = \frac{a^2}{2}$$

ning

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{4} \text{ (ruutmeetrit).}$$

2) Täisnurkse kolmnurga BCD ümberringjoone keskpunkt asub hüpotenuusi CD keskpunktis E. Kolmnurga BCD võrdhaarsusest järeldub, et $BE \perp CD$.

Seega $ABED$ osutub ruuduks, mille ümberringjoon on ühtlasi ka kolmnurga ABD ümberringjooneks. Seega asub kolmnurga BCD ümberringjoone keskpunkt E tõepoolest kolmnurga ABD ümberringjoonel.

<u>Hindamine:</u>

On tehtud ülesande tingimustele vastav joonis.	1p
On näidatud, et $\angle DBC = 90°$.	1p
On arvutatud nelinurga $ABCD$ pindala.	2p
On selgitatud, et kolmnurga BCD ümberringjoone keskpunkt asub lõigu CD keskpunktis.	1p
On põhjendatud, et lõigu CD keskpunkt asub kolmnurga ABD ümberringjoonel.	<u>2p</u>
	7p

5. **Vastus: võidustrateegia on Katrinil ehk Katrin võidab**

<u>Lahendus:</u>

Vaatleme müntide arvu jääke kolmega jagamisel.

2022 jagub 3-ga ehk annab kolmega jagades jäägi 0.

Kuna 5 annab kolmega jagades jäägi 2, 7 annab jäägi 1 ja 9 annab jäägi 0, siis Katrin võib oma käiguga müntide arvu muuta nii, et see annaks jagades kolmega jäägi 0, 1, 2 sõltumata sellest kui mitu münti oli kotis.

Diana aga peale enda käiku kas jätab kolmega jagades sama jäägi või jääk suureneb kahe võrra, kuid kunagi ei suurene 1 võrra.

Arvestades ülaltoodut, saab Katrin oma käike teha nii, et ei oleks võimalik saada järgmise 100-ga jaguva arvuga ühist jääki kolmega jagamisel, ehk, kui müntide arv on $100x$ ja $100(x+1)$ vahel, kus x on täisarv 1 ja 20 vahel, siis:

kui x jagub kolmega, siis Katrin võtab nii palju münte, et ülejäänud müntide arv annaks kolmega jagades jäägi 2;

kui x annab kolmega jagades jäägi 1, siis Katrin võtab nii palju münte, et ülejäänud müntide arv jaguks kolmega;

kui x annab kolmega jagades jäägi 2, siis Katrin võtab nii palju münte, et ülejäänud müntide arv annaks kolmega jagades jäägi 1.

Kui müntide arv on väiksem kui 100, siis enam pole vahet mis käike Katrin teeb, kuna müntide arv iga kahe käiguga väheneb ja Katrin lõpuks võidab.

<u>Hindamine:</u>

Märkamine, et Katrin saab oma käiguga muuta müntide arvu nii, et see annaks kolmega jagades jäägi 0, 1, 2 sõltumata sellest kui mitu münti oli kotis. 2p

Märkamine, et Diana saab müntide arvu muuta nii, et kolmega jagades jääk kas jääb samaks või suureneb 2 võrra. 2p

Lahenduse lõpuniviimine ja selgitused. 3p

7p